EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2

Filières M, M', P, P'

(Durée 4 heures)

I- Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Pour tout $n \geq 1$ on note C_n l'arc paramétré de point courant $M_n(t)$ de coordonnées $x_n(t) = \cos^n(t)$ et $y_n(t) = \sin^n(t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On désigne par L_n la longueur de C_n.

1°- Exprimer L_n à l'aide d'une intégrale définie, en utilisant le changement de variable $u = \cos(2t)$.

2°- Calculer L_4 et L_5.

3°- On note $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A = M_n(0)$, $B = M_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $I_n = M_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_nA + I_nB \leq L_n \leq OA + OB$

En déduire $\lambda = \lim_{n \to +\infty} L_n$

II- 1°- Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

Montrer que si f et g commutent, alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

2°- Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3$

$f(e_2) = e_1 + 3e_3$

$f(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3$

(e_1, e_2, e_3) désignant la base canonique de $\mathbb{R}^3$

f est il diagonalisable ?

3°- Soit $h \in L(\mathbb{R}^3)$. On suppose que h et f commutent. Montrer que f et h sont diagonalisables dans une même base.

4°- Determiner par leur matrice dans (e_1,e_2,e_3) les élements g de $L(\mathbb{R}^3)$ tels que $g^3 + 2g = f$.

III- Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à sa base canonique B, on considère le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

Former dans B les matrices de la projection orthogonale sur P, et de la symétrie orthogonale par rapport à P.

IV- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n.

Soit p un projecteur de E, c'est à dire un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$.

On suppose $p \neq 0$ et $p \neq id$, id désignant l'application identité de E dans E.

On pose, $\forall\ f \in L(E)$, $\Phi(f) = \left(\frac{1}{2}\ (fop + pof)\right)$

1°- Vérifier que $\Phi \in L(L(E))$, et montrer que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$

On note : $A=\{f\in L(E)\ /\ Im(f)\subseteq Ker(p) \text{ et } Im(p)\subseteq Ker(f)\ \}$

$B=\{f\in L(E)\ /\ Im(f)\subseteq Im(p) \text{ et } Ker(p)\subseteq Ker(f)\ \}$

$C_1=\{f\in L(E)\ /\ Im(f)\subseteq Im(p) \text{ et } Im(p)\subseteq Ker(f)\ \}$

$C_2=\{f\in L(E)\ /\ Im(f)\subseteq Ker(p) \text{ et } Ker(p)\subseteq Ker(f)\}$

2°- 2.a. Vérifier que A, B, C_1 et C_2 sont des sous-espaces vectoriels de L(E), et donner leurs dimensions en fonction de r = rang(p).

2.b. Déterminer Φ (f) pour f élement de A, B, C_1 et C_2 respectivement.

On pose $C = C_1 + C_2$

3°- 3.a. Montrer que $C = C_1 \oplus C_2$, puis que $L(E) = A \oplus B \oplus C$

3.b. En déduire que Φ est diagonalisable .

V- 1°- Soit $M = (m_{ij})\ (i,j)\in \{1,2,.....,n\}^2$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées n x n sur le corps $\mathbb{K}$.

Sa trace est le scalaire $Tr(M) = m_{1,1} + m_{2,2} + ... + m_{n,n}$, somme des coefficients de sa diagonale principale.

1.a. Montrer que deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

1.b. E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie . Soit $f \in L(E)$, M sa matrice dans une base de E. On pose $Tr(f) = Tr(M)$
Justifier cette définition.

1.c. Montrer que Tr(f) est la somme des valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités.

2°- E désigne maintenant un espace euclidien de dimension n.

2.a. On rappelle l'existence d'un endormorphisme u*, unique, associé à tout endormorphisme u de E, appelé endormorphisme adjoint de u et défini par la proposition : $\forall\ (x, y) \in E^2\ (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y)$, $(\mid)$ désignant le produit scalaire.
Montrer que $\forall\ u \in L(E)$, $u^* \circ u$ est un endomorphisme symétrique.

2.b. Montrer que l'application $\Psi : (u,v) \to Tr(v^* \circ u)$ est un produit scalaire sur L(E).

2.c. Si x et y sont deux vecteurs de E, on note $(x \mid y)$ leur produit scalaire.
Soit u un endomorphisme symétrique de E.
On note $\forall\ x \in E\ q(x) = (u(x) \mid x)$; (q est la forme quadratique associée à u). On suppose de plus que $Tr(u) = 0$.

* Justifier l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres de u, $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
On pose $a = \frac{1}{\sqrt{n}}(e_1 + e_2 + ... + e_n)$. Montrer que $q(a) = 0$;

* En déduire qu'il existe une base orthonormée de E, $(a_1, a_2, ... , a_n)$ telle que $\forall i \in \{1,2,....,n\}\ q(a_i) = 0$.